



· 粗糙集与形式概念分析中的约简研究 ·

基于概念约简的概念格还原

赵思雨^{1,2}, 魏玲¹

1. 西北大学 数学学院, 陕西 西安 710127; 2. 咸阳师范学院 数学与统计学院, 陕西 咸阳 712000

摘要 探讨基于概念约简的概念格还原方法。首先,通过建立概念约简子集与概念格交不可约概念的联系,揭示概念约简与交不可约概念集的关系,进而提出对概念约简中形式概念先求上确界后求下确界来还原概念格的方法。对偶地,通过建立概念约简与并不可约概念集的关系,提出对概念约简中形式概念先求下确界后求上确界的概念格还原方法。研究表明,概念约简可用部分形式概念还原概念格,因此可有效压缩和储存概念格的基本信息,为概念约简提供实际意义和潜在应用价值。

关键词 形式概念分析;概念格;概念格还原;概念约简

中图分类号: O29; TP18 **DOI:** 10.16152/j.cnki.xdxbzr.2026-01-014

Concept lattice restoration based on concept reducts

ZHAO Siyu^{1,2}, WEI Ling¹

1. School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Xianyang Normal University, Xianyang 712000, China

Abstract The concept lattice restoration methods are investigated through concept reducts. First, the relationship between subsets of concept reducts and meet-irreducible concepts is established, thereby revealing the connection between concept reducts and meet-irreducible concept sets. Based on this foundation, a concept lattice restoration method is proposed in which supremums are first computed, followed by infimums, for formal concepts in concept reducts. Dually, an alternative restoration approach is presented in which infimums are first computed, then supremums. It is demonstrated that concept lattices can be restored by concept reducts using partial formal concepts, thereby achieving effective compression and storage of lattice information. This provides practical significance and potential application value for concept reduction.

Keywords formal concept analysis; concept lattice; concept lattice restoration; concept reduction

形式概念分析 (Formal concept analysis, FCA) 是一种有效的数据分析与知识发现工具^[1-2], 其以形式背景为数据基础, 通过对象集、属性集以及它们之间的二元关系存储对象-属性信息, 进而利用对象与属性之间的共性信息提取形

式概念。在所有形式概念构成的集合上定义偏序关系后, 可生成一个完备格, 称为概念格。概念格不仅包含概念信息, 还蕴含结构信息, 本文将这些信息统称为概念-结构信息。

约简是形式概念分析的核心研究方向之一,

收稿日期: 2025-07-15 修回日期: 2025-08-20

基金项目: 国家自然科学基金 (12171392); 陕西数理基础科学研究项目 (23JSZ008); 陕西省教育厅专项科研计划项目 (25JK0721)。

第一作者: 赵思雨, 女, 博士研究生, 讲师, 从事形式概念分析等研究, 418589952@qq.com。

通信作者: 魏玲, 女, 教授, 博士生导师, 从事形式概念分析、粒计算、三支决策理论研究, wl@nwu.edu.cn。

目前主要集中于属性约简和概念约简。属性约简是相对成熟的研究领域,其目标是在保持形式背景或概念格某指定特征的前提下,删除冗余属性,实现知识的简化。根据不同目的及需求,存在许多不同语义的属性约简。如张文修和魏玲等定义了保持格结构不变的属性约简^[34];Wu 等提出了保持对象粒不变的粒约简^[5];Li 等讨论了保留交、并不可约概念的属性约简^[6];Li 等研究了保持决策规则不变的属性约简^[7]。

概念约简是由魏玲和曹丽等提出的一种约简理论^[8-9],其思想源于以形式概念为因子的布尔矩阵分解(Boolean matrix factorization, BMF)。Kepert 等首次将 FCA 与 BMF 相结合,提出了以形式概念作为因子进行布尔矩阵分解的方法^[10]。在此基础上,Bělohávek 等给出了相应的理论证明^[11]。这种将 FCA 引入 BMF 的方法在 BMF 相关研究中得到了深入探索。Encheva 将其应用于高等教育合并的研究^[12];Trnecka 等提出 BMF 数据约简方法^[13];Bělohávek 等设计 BMF 算法并与 3 种经典算法对比^[14];Makhalova 等基于 MDL 原理提出因子选择算法^[15]。以上研究均从 BMF 视角出发,将 FCA 作为工具处理 BMF 问题。而魏玲和曹丽等聚焦形式概念本身,从 FCA 视角提出了概念约简理论^[8-9]。概念约简旨在用极小的概念集合保留形式背景的二元关系,其研究内容目前主要集中于以下几方面:① 概念约简的求解方法^[16-18];② 具有不同语义的概念约简^[19-21];③ 不同类型背景中的概念约简^[22-23];④ 概念约简的应用^[19, 24-25]等。

概念约简可用部分形式概念还原形式背景的二元关系,即形式背景的对象-属性信息,但通过概念约简还原概念格的概念-结构信息的研究尚未展开。因此,本文探讨由概念约简还原概念格的方法,以证实概念约简仅需存储少量概念即可还原原始形式背景及概念格的完整信息与结构,凸显该理论在信息存储、压缩、转移等方面的优势。

1 基础知识

定义 1^[1] 称三元组 (G, M, I) 为形式背景,其中 G 为对象集, M 为属性集, $I \subseteq G \times M$ 为 G 与 M 之间的二元关系。称 G 中的元素为对象, M 中的元素为属性。对于任意 $g \in G$ 及 $m \in M$,若 (g, m)

$\in I$,称对象 g 具有属性 m 或属性 m 被对象 g 具有,记为 gIm 。

对于形式背景 (G, M, I) , $X \subseteq G, B \subseteq M$,定义一对导出算子 $*$: $\mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{P}(M)$, 以及 $*$: $\mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(G)$, 如下所示:

$$X^* = \{m \in M \mid \forall g \in X, gIm\};$$

$$B^* = \{g \in G \mid \forall m \in B, gIm\}.$$

导出算子的相关性性质见文献[1]。为简单起见,对于任意对象 $g \in G$, 属性 $m \in M$, 记 $\{g\}^*$ 为 g^* , $\{m\}^*$ 为 m^* 。

对形式背景 (G, M, I) , $g \in G, m \in M$, 若 $g^* \neq \emptyset, g^* \neq M, m^* \neq \emptyset$ 且 $m^* \neq G$, 则称 (G, M, I) 为正则背景。

定义 2^[1] 设 (G, M, I) 为形式背景, $X \subseteq G, B \subseteq M$ 。若 $X^* = B$ 且 $B^* = X$, 则称 (X, B) 是一个形式概念, 简称概念。其中 X 为概念的外延, B 为概念的内涵。

在形式背景中,对于任意对象 $g \in G$, 属性 $m \in M$, (g^{**}, g^*) 和 (m^*, m^{**}) 是概念, 分别被称为对象概念和属性概念。

记形式背景 (G, M, I) 全体概念的集合为 $L(G, M, I)$, 对于任意 $(X_1, B_1), (X_2, B_2) \in L(G, M, I)$, 定义偏序关系如下^[1]:

$$(X_1, B_1) \leq (X_2, B_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 (B_2 \subseteq B_1).$$

此时,称 (X_1, B_1) 是 (X_2, B_2) 的亚概念, (X_2, B_2) 是 (X_1, B_1) 的超概念。进一步, $L(G, M, I)$ 形成一个完备格,称为概念格。上确界和下确界的计算方式如下^[1]:

$$\bigvee_{i \in T} (X_i, B_i) = ((\bigcup_{i \in T} X_i)^{**}, \bigcap_{i \in T} B_i);$$

$$\bigwedge_{i \in T} (X_i, B_i) = (\bigcap_{i \in T} X_i, (\bigcup_{i \in T} B_i)^{**}).$$

式中, $(X_i, B_i) \in L(G, M, I), i \in T, T$ 为指标集。事实上,概念格是以概念为节点的格。

设 L 是一个格,对于任意 $x \in L$:若 $x \neq \bigvee \{l \in L \mid l \leq x, l \neq x\}$, 则称 x 为并不可约元;若 $x \neq \bigwedge \{l \in L \mid x \leq l, x \neq l\}$, 则称 x 为交不可约元^[1]。对于任意 $X \subseteq L$:若 L 中的每个元素都可以用 X 的子集的上确界表示,则称 X 在 L 中并稠密;若 L 中的每个元素都可以用 X 的子集的下确界表示,则称 X 在 L 中交稠密。在概念格中,称交不可约元为交不可约概念,并不可约元为并不可约概念。

记概念格 $L(G, M, I)$ 中对象概念的全体为 $O(L)$, 属性概念的全体为 $A(L)$, 并不可约概念的全体为 $J(L)$, 交不可约概念的全体为 $M(L)$ 。文献[1]已表明 $J(L) \subseteq O(L), M(L) \subseteq A(L)$ 。

定义3^[8] 设 (G,M,I) 为形式背景, $L(G,M,I)$ 为其概念格, $\mathcal{R} \subseteq L(G,M,I)$ 。若

$I = \cup_{(X,B) \in \mathcal{R}} X \times B$,
则称 $\mathcal{R}$ 为保持二元关系不变的概念协调集,简称概念协调集;若对任意 $(X_i,B_i) \in \mathcal{R}$,

$I \neq \cup_{(X,B) \in \mathcal{R} \setminus \{(X_i,B_i)\}} X \times B$,
则称 $\mathcal{R}$ 为保持二元关系不变的概念约简,简称概念约简。

例1 表1是一个正则背景 (G,M,I) ,其中对象集 $G = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,属性集 $M = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ 。表中第 $i(i = 2, \cdots, 9)$ 行和第 $j(j = 2, \cdots, 9)$ 列交叉处的“ $\times$ ”表示第 i 行对应的对象具有第 j 列对应的属性,否则用空格表示。形式背景 (G,M,I) 的概念格 $L(G,M,I)$ 如图1所示,其中 $c_l(l = 1,2,\cdots,19)$ 为19个概念的标号,所有概念如表2所示。此例中,

$O(L) = J(L) = \{c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_9, c_{12}\},$
 $A(L) = M(L) = \{c_2, c_4, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}, c_{17}, c_{18}\}。$

表1 形式背景 (G,M,I)
Tab. 1 A formal context (G,M,I)

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
1	×					×		
2	×					×	×	
3	×	×				×	×	
4		×				×	×	×
5	×		×		×			
6	×	×	×		×			
7		×	×	×				
8		×	×		×			

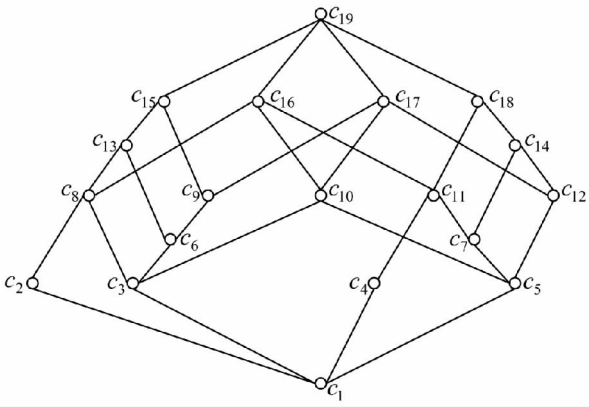


图1 概念格 $L(G,M,I)$
Fig. 1 A concept lattice $L(G,M,I)$

表2 图1的所有形式概念
Tab. 2 All concepts in Fig. 1

标号	形式概念	标号	形式概念
c_1	$(\emptyset, M)$	c_{11}	$(\{6,7,8\}, \{b,c\})$
c_2	$(\{4\}, \{b,f,g,h\})$	c_{12}	$(\{5,6\}, \{a,c,e\})$
c_3	$(\{3\}, \{a,b,f,g\})$	c_{13}	$(\{2,3,4\}, \{f,g\})$
c_4	$(\{7\}, \{b,c,d\})$	c_{14}	$(\{5,6,8\}, \{c,e\})$
c_5	$(\{6\}, \{a,b,c,e\})$	c_{15}	$(\{1,2,3,4\}, \{f\})$
c_6	$(\{2,3\}, \{a,f,g\})$	c_{16}	$(\{3,4,6,7,8\}, \{b\})$
c_7	$(\{6,8\}, \{b,c,e\})$	c_{17}	$(\{1,2,3,5,6\}, \{a\})$
c_8	$(\{3,4\}, \{b,f,g\})$	c_{18}	$(\{5,6,7,8\}, \{c\})$
c_9	$(\{1,2,3\}, \{a,f\})$	c_{19}	$(G, \emptyset)$
c_{10}	$(\{3,6\}, \{a,b\})$		

根据概念约简的定义, $\mathcal{R} = \{c_2, c_3, c_4, c_6, c_7, c_9, c_{12}\}$ 是 (G,M,I) 的一个概念约简。事实上, (G,M,I) 共有52个概念约简。

2 “上确界－下确界”概念格还原方法

本节给出一种从概念约简出发,先求上确界再求下确界来还原概念格的方法。

由定义3知,概念协调集中的所有概念可还原形式背景 (G,M,I) 的二元关系 I 。事实上,对于正则背景,概念协调集中所有概念的外延可还原形式背景的对象集 G ,对偶地,所有概念的内涵可还原形式背景的属性集 M ,这一结论可由如下引理得出。

引理1 设 (G,M,I) 是正则背景, $\mathcal{R}$ 是概念协调集,则下列结论成立:

- 1) $\cup_{(X,B) \in \mathcal{R}} X = G$;
- 2) $\cup_{(X,B) \in \mathcal{R}} B = M。$

证明 结论1) 由于 $\cup_{(X,B) \in \mathcal{R}} X \subseteq G$ 显然成立,只需证明 $G \subseteq \cup_{(X,B) \in \mathcal{R}} X$ 。设 $g \in G$,由 (G,M,I) 是正则背景知,存在 $m \in M$,使得 $(g,m) \in I$,又由 $\mathcal{R}$ 是概念协调集知, $I = \cup_{(X,B) \in \mathcal{R}} X \times B$,则 $(g,m) \in \cup_{(X,B) \in \mathcal{R}} X \times B$,即存在 $(X,B) \in \mathcal{R}$,使得 $(g,m) \in X \times B$,故 $g \in X, g \in \cup_{(X,B) \in \mathcal{R}} X$,因此, $G \subseteq \cup_{(X,B) \in \mathcal{R}} X$ 。综上, $\cup_{(X,B) \in \mathcal{R}} X = G$ 。类似于结论1)的证明,可得结论2)成立。

引理2 设 (G,M,I) 为形式背景, $L(G,M,I)$ 为其概念格。对于任意 $g \in G, m \in M, (X,B) \in L(G,M,I)$,如下结论成立:

1) $m \in B \Leftrightarrow (X, B) \leq (m^*, m^{**})$;

2) $g \in X \Leftrightarrow (g^{**}, g^*) \leq (X, B)$ 。

证明 结论 1) 因为 $m \in B \Leftrightarrow m^{**} \subseteq B^{**} = B \Leftrightarrow (X, B) \leq (m^*, m^{**})$, 故结论 1) 得证。类似于结论 1) 的证明, 可得结论 2) 成立。

引理 2 表明属性 $m \in M$ 只存在于属性概念 (m^*, m^{**}) 及其亚概念的内涵中; 对象 $g \in G$ 只存在于对象概念 (g^{**}, g^*) 及其超概念的外延中。换言之: 若一个概念的内涵中包含属性 m , 则其一定是 (m^*, m^{**}) 或者其亚概念; 若一个概念的外延中包含对象 g , 则其一定是 (g^{**}, g^*) 或者其超概念。

对于任意对象 $g \in G$, 属性 $m \in M$, 以及概念约简 $\mathcal{R}$, 因为 $\mathcal{R}$ 是概念约简, 故由引理 1 知 $\mathcal{R}$ 中必然存在内涵包含 m 的概念, 且存在外延包含 g 的概念。因此, 根据引理 2 (1), $\mathcal{R}$ 中一定存在小于等于 (m^*, m^{**}) 的概念; 同时, 根据引理 2 (2), $\mathcal{R}$ 中一定存在大于等于 (g^{**}, g^*) 的概念。对于任意概念 $(X, B) \in L(G, M, I)$, 记

$$(X, B)_{\leq} = \{c \in L(G, M, I) \mid c \leq (X, B)\},$$

$$(X, B)_{\geq} = \{c \in L(G, M, I) \mid (X, B) \leq c\}.$$

将上述结论总结如下。

引理 3 设 (G, M, I) 为形式背景, $L(G, M, I)$ 为其概念格, $\mathcal{R}$ 是概念约简。对于任意 $g \in G, m \in M$, 有以下结论成立:

1) $(m^*, m^{**})_{\leq} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$;

2) $(g^{**}, g^*)_{\geq} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$ 。

根据上述引理, 可得交不可约概念与概念约简子集的上确界的联系如下所示。

定理 1 设 (G, M, I) 为形式背景, $L(G, M, I)$ 为其概念格。对于任意交不可约概念 $(X, B) \in M(L)$, 以及概念约简 $\mathcal{R}$, 存在 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}, \mathcal{H} \neq \emptyset$, 使得 $(X, B) = \bigvee \mathcal{H}$, 其中 $\mathcal{H} = \{(Y, C) \mid (Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}\}$ 。

证明 设 $(X, B) \in M(L)$ 。由 $M(L) \subseteq A(L)$ 知, 存在属性 $m_0 \in M$ 满足 $(X, B) = (m_0^*, m_0^{**})$ 。故由引理 3 结论 1) 知 $\mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq} \neq \emptyset$, 即 $\mathcal{H} \neq \emptyset$ 。下面证明 $(X, B) = \bigvee \{(Y, C) \mid (Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}\}$ 。

首先, 证明 $(X, B) = (m_0^*, m_0^{**}) \leq \bigvee \{(Y, C) \mid (Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}\}$ 。假设 $(m_0^*, m_0^{**}) \not\leq \bigvee \{(Y, C) \mid (Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}\}$, 则 $m_0^* \not\subseteq \bigcup_{(Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}} Y^{**}$ 。因为 $\bigcup_{(Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}} Y \subseteq$

$(\bigcup_{(Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}} Y)^{**}$, 故 $m_0^* \not\subseteq \bigcup_{(Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}} Y$, 即存在 $g_0 \in m_0^*$, 使得 $g_0 \notin \bigcup_{(Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}} Y$ 。因此, $(g_0, m_0) \notin \bigcup \{Y \times C \mid (Y, C) \in$

$$\mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}\} \quad (1)$$

成立。下面证明公式

$$(g_0, m_0) \notin \bigcup \{Y \times C \mid (Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}\} \quad (2)$$

成立。事实上, 对于任意 $(Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}$, 有 $(Y, C) \leq (X, B) = (m_0^*, m_0^{**})$, 则由引理 2 结论 1) 得 $m_0 \notin C$, 故 $(g_0, m_0) \notin \bigcup \{Y \times C \mid (Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}\}$ 。结合式 (1) 及式 (2), 可得 $(g_0, m_0) \notin \bigcup \{Y \times C \mid (Y, C) \in \mathcal{R}\} = I$, 与 $(g_0, m_0) \in I$ 矛盾。因此, $(X, B) \leq \bigvee \{(Y, C) \mid (Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}\}$ 得证。

其次, 证明 $\bigvee \{(Y, C) \mid (Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}\} \leq (X, B)$ 。对于任意 $(Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}$, 有 $(Y, C) \leq (X, B)$, 故 $\bigvee \{(Y, C) \mid (Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}\} \leq (X, B)$ 。

综上, 得 $(X, B) = \bigvee \{(Y, C) \mid (Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\leq}\}$, 即 $(X, B) = \bigvee \mathcal{H}$ 。

考虑交不可约概念的集合 $M(L)$, 并记 $\mathcal{R}$ 的任意子集的上确界构成的集合为 $\mathcal{R}_V = \{\bigvee \mathcal{H} \mid \mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}\}$, 可得 $M(L)$ 与 $\mathcal{R}_V$ 的关系如下。

定理 2 设 (G, M, I) 为形式背景, $L(G, M, I)$ 为其概念格。对于任意概念约简 $\mathcal{R}, M(L) \subseteq \mathcal{R}_V$ 。

证明 对于任意 $(X, B) \in M(L)$, 由定理 1 知, 存在 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}$, 使得 $(X, B) = \bigvee \mathcal{H}$ 。由于 $\mathcal{R}_V = \{\bigvee \mathcal{H} \mid \mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}\}$, 故 $(X, B) \in \mathcal{R}_V$ 。因此, $M(L) \subseteq \mathcal{R}_V$ 。

对于格 $V, X \subseteq V, X$ 在 V 中交稠密当且仅当 X 包含 V 的所有交不可约元^[26]。由定理 2 知, 概念格 $L(G, M, I)$ 的子集 $\mathcal{R}_V$ 包含 $L(G, M, I)$ 的交不可约概念集 $M(L)$, 于是可得如下结论。

定理 3 设 (G, M, I) 为形式背景, $L(G, M, I)$ 为其概念格。对于任意概念约简 $\mathcal{R}, \mathcal{R}_V$ 在 $L(G, M, I)$ 中交稠密。

记 $\mathcal{R}_V$ 的任意子集的下确界构成的集合为 $(\mathcal{R}_V)_{\wedge} = \{\bigwedge \mathcal{K} \mid \mathcal{K} \subseteq \mathcal{R}_V\}$, 进一步可得如下定理。

定理 4 设 (G, M, I) 为形式背景, $L(G, M, I)$ 为其概念格。对于任意概念约简 $\mathcal{R}$, 有 $(\mathcal{R}_V)_{\wedge} = L(G, M, I)$ 。

证明 由定理 3 和交稠密的定义知, 对于任

意 $(X, B) \in L(G, M, I)$, 存在 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}_V$, 使得 $(X, B) = \bigwedge \mathcal{H}$, 则 $(X, B) \in (\mathcal{R}_V)_\wedge$, 故 $L(G, M, I) \subseteq (\mathcal{R}_V)_\wedge$ 。又因为 $(\mathcal{R}_V)_\wedge \subseteq L(G, M, I)$ 自然成立, 故 $(\mathcal{R}_V)_\wedge = L(G, M, I)$ 。

在定理4的基础上, 我们可得到由任意概念约简 $\mathcal{R}$ 出发还原概念格的方法。首先, 通过获取 $\mathcal{R}$ 的任意子集的上确界, 得到一个新的概念集合 $\mathcal{R}_V$ 。进而, 计算这个新概念集合 $\mathcal{R}_V$ 的任意子集的下确界, 所得到的概念集合即为 $L(G, M, I)$ 。相应的算法如算法1所示。

算法1 “上确界-下确界”概念格还原算法。

输入 概念约简 $\mathcal{R}$ 。

输出 概念格 $L(G, M, I)$ 。

- 1 对于任意 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}$, 计算 $\bigvee \mathcal{H}$;
- 2 构造概念集合 $\mathcal{R}_V = \{ \bigvee \mathcal{H} \mid \mathcal{H} \subseteq \mathcal{R} \}$;
- 3 对于任意 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}_V$, 计算 $\bigwedge \mathcal{H}$;
- 4 构造概念集合 $L(G, M, I) = \{ \bigwedge \mathcal{H} \mid \mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}_V \}$, 并输出 $L(G, M, I)$ 。

例2 (续例1) 对于例1的形式背景 (G, M, I) 以及概念约简 $\mathcal{R} = \{c_2, c_3, c_4, c_6, c_7, c_9, c_{12}\}$, $\mathcal{R}$ 的任意子集的上确界形成的集合 $\mathcal{R}_V = \{c_2, c_3, c_4, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}, c_{17}, c_{18}, c_{19}\}$, $\mathcal{R}_V$ 的任意子集的下确界形成的集合 $(\mathcal{R}_V)_\wedge$ 即为概念格 $L(G, M, I)$ 。上述概念格还原过程如图2所示, 其中黑色节点表示概念已被还原。

3 “下确界-上确界”概念格还原方法

第2节提供了一种基于概念约简, 先计算上确界后计算下确界来还原概念格的方法。由对偶性知, 概念格也可从概念约简出发, 通过先计算下确界后计算上确界的方式还原。由于本节中定理5~定理8的证明分别同第2节中的定理1~定理4的证明类似, 故将其省略。

首先, 给出并不可约概念与概念约简子集的下确界的联系。

定理5 设 (G, M, I) 为形式背景, $L(G, M, I)$ 为其概念格。对于任意并不可约概念 $(X, B) \in J(L)$, 以及概念约简 $\mathcal{R}$, 存在 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}$, $\mathcal{H} \neq \emptyset$, 使得 $(X, B) = \bigwedge \mathcal{H}$, 其中 $\mathcal{H} = \{(Y, C) \mid (Y, C) \in \mathcal{R} \cap (X, B)_{\geq}\}$ 。

其次, 给出并不可约概念集 $J(L)$ 与概念约简的任意子集的下确界构成的集合 $\mathcal{R}_\wedge = \{ \bigwedge \mathcal{H} \mid$

$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R} \}$ 的关系如定理6所示。

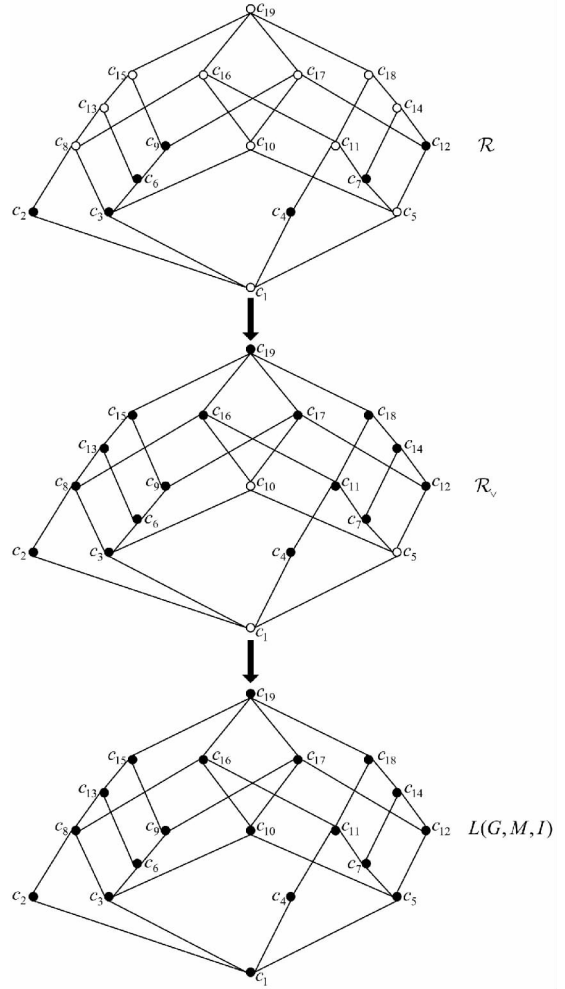


图2 例2的概念格还原过程

Fig. 2 The restoring process of Example 2

定理6 设 (G, M, I) 为形式背景, $L(G, M, I)$ 为其概念格。对于任意概念约简 $\mathcal{R}$, $J(L) \subseteq \mathcal{R}_\wedge$ 。根据定理6, 如下定理自然成立。

定理7 设 (G, M, I) 为形式背景, $L(G, M, I)$ 为其概念格。对于任意概念约简 $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\wedge$ 在 $L(G, M, I)$ 中并稠密。

记 $\mathcal{R}_\wedge$ 的任意子集的上确界构成的集合为 $(\mathcal{R}_\wedge)_\vee = \{ \bigvee \mathcal{H} \mid \mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}_\wedge \}$, 进一步可得如下结论。

定理8 设 (G, M, I) 为形式背景, $L(G, M, I)$ 为其概念格。对于任意概念约简 $\mathcal{R}$, 有 $(\mathcal{R}_\wedge)_\vee = L(G, M, I)$ 。

在定理8的基础上, 得到从任意概念约简 $\mathcal{R}$ 出发还原概念格的另一种方法。首先, 通过获取 $\mathcal{R}$ 的任意子集的下确界, 得到一个新的概念集合 $\mathcal{R}_\wedge$ 。进而, 计算这个新概念集合 $\mathcal{R}_\wedge$ 的任意子集的上确界, 所得到的概念集合即为 $L(G, M, I)$ 。相

应的算法如算法 2 所示。

算法 2 “下确界 - 上确界”概念格还原算法。

输入 概念约简 $\mathcal{R}$ 。

输出 概念格 $L(G,M,I)$ 。

- 1 对于任意 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}$, 计算 $\bigwedge \mathcal{H}$;
- 2 构造概念集合 $\mathcal{R}_\wedge = \{ \bigwedge \mathcal{H} \mid \mathcal{H} \subseteq \mathcal{R} \}$;
- 3 对于任意 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{R}_\wedge$, 计算 $\bigvee \mathcal{K}$;
- 4 构造概念集合 $L(G,M,I) = \{ \bigvee \mathcal{K} \mid \mathcal{K} \subseteq \mathcal{R}_\wedge \}$, 并输出 $L(G,M,I)$ 。

例 3 (续例 1) 对于例 1 的形式背景 (G,M,I) 以及概念约简 $\mathcal{R} = \{c_2, c_3, c_4, c_6, c_7, c_9, c_{12}\}$, $\mathcal{R}$ 的任意子集的下确界形成的集合为 $\mathcal{R}_\wedge = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_9, c_{12}\}$, $\mathcal{R}_\wedge$ 的任意子集的上确界形成的集合 $(\mathcal{R}_\wedge)_\vee$ 即为概念格 $L(G,M,I)$ 。上述概念格还原过程如图 3 所示。

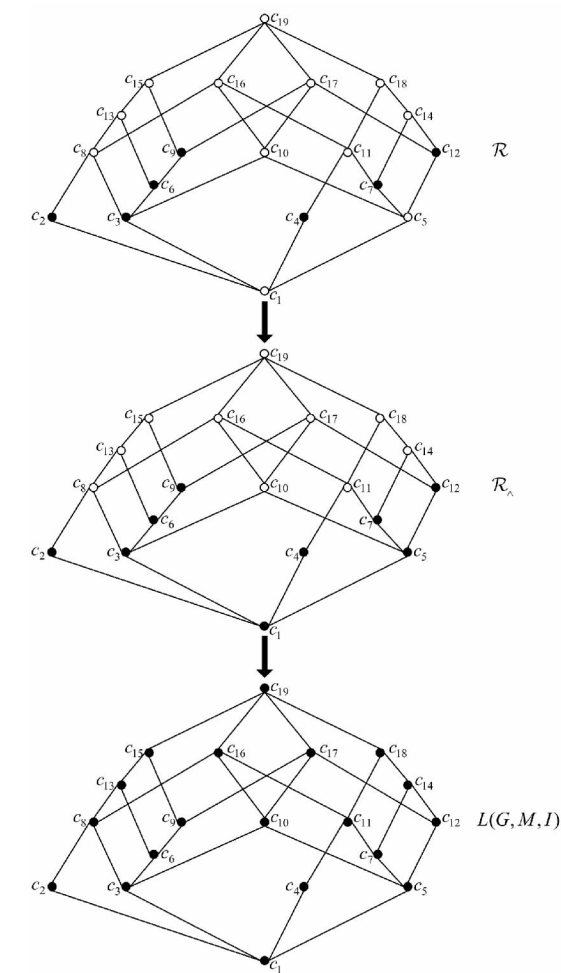


图 3 例 3 的概念格还原过程

Fig. 3 The restoring process of Example 3

4 结语

本文讨论了由概念约简还原概念格的可行性,并给出两种具体的还原方法。第 1 种方法先获取由概念约简的任意子集的上确界组成的概念集合,然后,计算该概念集合的任意子集的下确界,由此得到的概念集合即为概念格。第 2 种方法是对概念约简中的概念先计算下确界后计算上确界以还原概念格。

由本文研究内容可知,一个概念约简是一组特定概念构成的集合,其在还原形式背景的同时亦可还原概念格。通过仅存储有限数量的概念来检索形式背景和概念格的能力表明了概念约简在节省存储空间的基础上还能有效还原原始信息,这为概念约简提供了实际意义和潜在的应用价值。目前关于概念约简获取方法的研究主要集中在计算所有的概念约简,计算过程相对复杂、效率相对较低。根据本文的结论,任何一个概念约简都可以保留形式背景和概念格的完整信息,因此,针对不同的目的,未来可以考虑仅计算部分甚至一个概念约简,在解决相关问题的前提下,提高概念约简计算效率。

参考文献

[1] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts[C] // Ordered Sets. Dordrecht: Springer, 1982: 445-470.

[2] GANTER B, WILLE R. Formal concept analysis: Mathematical foundations [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.

[3] 张文修, 魏玲, 祁建军. 概念格的属性约简理论与方法 [J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2005, 35 (6): 628-639.

ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept lattice[J]. Science in China Series F-Information Sciences, 2005, 48 (6): 713-726.

[4] 魏玲, 祁建军, 张文修. 决策形式背景的概念格属性约简 [J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2008, 38 (2): 195-208.

WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts[J]. Science in China Series F-Information Sciences, 2008, 51 (7): 910-923.

- [5] WU W Z, LEUNG Y, MI J S. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2009, 21(10): 1461-1474.
- [6] LI T J, LI M Z, GAO Y. Attribute reduction of concept lattice based on irreducible elements[J]. International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, 2013, 11(6): 1350046.
- [7] LI J H, MEI C L, WANG J H, et al. Rule-preserved object compression in formal decision contexts using concept lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 71: 435-445.
- [8] 魏玲, 曹丽, 祁建军, 等. 形式概念分析中的概念约简与概念特征[J]. 中国科学: 信息科学, 2020, 50(12): 1817-1833.
- WEI L, CAO L, QI J J, et al. Concept reduction and concept characteristics in formal concept analysis[J]. Scientia Sinica Informationis, 2020, 50(12): 1817-1833.
- [9] 曹丽, 魏玲, 祁建军. 保持二元关系不变的概念约简[J]. 模式识别与人工智能, 2018, 31(6): 516-524.
- CAO L, WEI L, QI J J. Concept reduction preserving binary relations[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2018, 31(6): 516-524.
- [10] KEPRT A, SNASEL V. Binary factor analysis with help of formal concepts [C] // Snasel V, Belohlavek R. International Conference on Concept Lattices and Their Applications. Ostrava: Czech Republic, 2004, 110: 90-101.
- [11] BĚLOHLÁVEK R, VYCHODIL V. Discovery of optimal factors in binary data via a novel method of matrix decomposition[J]. Journal of Computer and System Sciences, 2010, 76(1): 3-20.
- [12] ENCHEVA S. Factor analysis based selections[J]. International Journal of Advanced Research in Artificial Intelligence, 2016, 5(5): 44-47.
- [13] TRNECKA M, TRNECKOVA M. Data reduction for Boolean matrix factorization algorithms based on formal concept analysis [J]. Knowledge-Based Systems, 2018, 158: 75-80.
- [14] BĚLOHLÁVEK R, TRNECKA M. A new algorithm for Boolean matrix factorization which admits overcovering [J]. Discrete Applied Mathematics, 2018, 249: 36-52.
- [15] MAKHALOVA T, TRNECKA M. From-below Boolean matrix factorization algorithm based on MDL[J]. Advances in Data Analysis and Classification, 2021, 15(1): 37-56.
- [16] 马文胜, 侯锡林. 形式概念分析中的同效关系与概念约简[J]. 计算机科学, 2023, 50(4): 63-76.
- MA W S, HOU X L. Same effect relation and concept reduction in formal concept analysis [J]. Computer Science, 2023, 50(4): 63-76.
- [17] ZHOU J Q, YANG S C, WANG X F. Concept and attribute reduction based on rectangle theory of formal concept[J]. Mathematical Foundations of Computing, 2023, 6(2): 178-189.
- [18] ZHAO S Y, QI J J, LI J A, et al. Concept reduction in formal concept analysis based on representative concept matrix [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2023, 14(4): 1147-1160.
- [19] 于亚琪, 赵思雨, 魏玲. 面向属性概念格的概念约简及其在知识空间理论中的应用[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2023, 53(5): 812-820.
- YU Y Q, ZHAO S Y, WEI L. Concept reduction of property-oriented concept lattices and its application in knowledge space theory[J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2023, 53(5): 812-820.
- [20] 李炎, 赵思雨, 任睿思, 等. 保持规则前件信息的概念约简[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2023, 53(5): 803-811.
- LI Y, ZHAO S Y, REN R S, et al. Concept reduction preserving antecedent information of rules[J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2023, 53(5): 803-811.
- [21] 刘津, 米据生, 李仲玲, 等. 基于概念复合的对偶三支概念格及其概念约简[J]. 计算机科学, 2023, 50(6): 122-130.
- LIU J, MI J S, LI Z L, et al. Dual three-way concept lattice based on composition of concepts and its concept reduction[J]. Computer Science, 2023, 50(6): 122-130.
- [22] 李俊余, 李星璇, 王霞, 等. 基于三元因子分析的三元概念约简[J]. 南京大学学报(自然科学), 2020, 56(4): 480-493.
- LI J Y, LI X X, WANG X, et al. Reduction of triadic concepts based on triadic factor analysis[J]. Journal of Nanjing University (Natural Science Edition), 2020, 56(4): 480-493.

[23] 朱朵朵, 任睿思, 赵思雨, 等. 基于不完备背景的 3 类 SE-ISI 概念约简[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2023, 53(5): 821-829.
ZHU D D, REN R S, ZHAO S Y, et al. Three types of SE-ISI concept reduction based on incomplete contexts[J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2023, 53(5): 821-829.

[24] 王一帆, 金铭, 张琴, 等基于概念约简的强协调决策形式背景的规则提取[J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(1): 83-90.
WANG Y F, JIN M, ZHANG Q, et al. Rule acquisition based on concept reduction in strongly consistent formal decision context[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2025, 60(1): 83-90.

[25] LIANG T J, LIN Y D, LI J J, et al. Incremental cognitive learning approach based on concept reduction [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2025, 179: 109359.

[26] DAVEY B A, PRIESTLY H A. Introduction to lattices and order [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002:53-55.

(编辑 张 欢)